La cellule d'abeille et le gâteau de cire
Considérations historiques, mathématiques et symboliques

Position du problème

La civilisation crétoise honorait déjà les abeilles comme en témoigne ce chef d'œuvre de l'orfèvrerie minœnne datant de 1700 ans avant notre ère. *dia 1 ab crétoise*
Retrouvée dans les fouilles du palais de Chryssolakkos à Malia, cette merveilleuse petite broche en or représente deux abeilles entourant un gâteau de miel circulaire: on peut actuellement l'admirer au musée d'Héraklion.
Je la prendrais volontiers comme emblème de ce travail mathématique.

Historique

Les premières études réellement scientifiques concernant les insectes remontent au siècle des Lumières. Elles ont été rendues possibles par la découverte du microscope.
Bien plus récemment, le belge Maurice Maeterlinck en 1911, et puis l'allemand Karl von Frisch en 1973, ont été honorés chacun d'un prix Nobel pour leurs travaux sur la vie des abeilles.

Avant d'aborder le problème des abeilles, il me faut d'abord vous entretenir d'un très grand savant du siècle des Lumières, aujourd'hui injustement méconnu.

A Paris, le musée des « Arts et métiers » est situé dans le 2^{e} Arrondissement.
La plaque de la rue indique : *dia 2 plaque Paris*
« ***Réaumur 1683-1757 physicien*** » et c'est tout ce que le passant sait de René Antoine Ferchault de Réaumur !

« Physicien ! », alors que ce véritable « touche à tout » des sciences de son époque, animé du soucis permanent d'être utile à ses contemporains, fut à la fois biologiste, généticien, botaniste, géologue, mécanicien et physicien.

Suite à l'initiative de Colbert, c'est Réaumur qui est à la base de la création du « ***Conservatoire des Arts et Métiers*** ». Il ne le voyait pas sous sa forme actuelle d'un musée fixe à Paris, mais bien comme une exposition itinérante qui aurait parcouru la France entière apportant partout les Lumières de la Raison et les découvertes les plus récentes en matière de Sciences et de Techniques.

Par exemple, grâce à la précision de son thermomètre, il inventa les premières couveuses semi industrielles pour l'élevage de la volaille, améliorant ainsi le niveau de vie des populations rurales.
Réaumur eut l'idée de prendre la température de plusieurs de ses concitoyens à divers moments de la journée et de l'année : il constata qu'elle avoisinait toujours 32° Réaumur quelles que soient les conditions extérieures !
Il prouva ainsi la constance de la température humaine dont l'utilité est fondamentale en médecine. Depuis lors, l'un des premiers gestes médicaux est de prendre d'abord la température du patient !

Sa découverte du phénomène de la ***parthénogenèse*** lui valut de sérieux démêlés avec les Jésuites, et pourtant ce scandale des « vierges qui enfantent » se révéla très répandu dans la nature aussi bien chez les abeilles, les fourmis ou les pucerons que par exemple en botanique pour les bananes.

C'est en étudiant la texture des nids de guêpes qu'il découvrit que l'on pouvait fabriquer du papier à partir du bois. Ce moyen, bien plus économique que le papier de chiffon, permit de mettre les livres, et donc les connaissances, à la portée d'un plus grand public.

Pendant 40 ans, Directeur de l'Académie Royale des Sciences de Paris de 1713 à 1752, Réaumur inventa l'acier industriel, la fonte à mouler pour remplacer le fer forgé, le fer blanc pour construire plus facilement de multiples récipients, des ancres de marine aussi bien que l'art de fabriquer industriellement des épingles !

. *dia3 livre Bresson Réaumur*

Vous comprendrez donc mon enthousiasme pour un tel savant, qui marqua les sciences de son époque. Il vient d'être brillamment remis à l'honneur par le livre de Gilles Bresson intitulé :
« Réaumur, le savant qui osa croiser une poule avec un lapin ».
Il y est décrit comme l'image du « Parfait honnête homme » du siècle des Lumières.

Revenons alors plus particulièrement à nos abeilles :

dia 4 microscope

La contribution de Réaumur à l'étude des insectes est prépondérante : elle est liée à l'invention du microscope qui lui permit les observations les plus fines de l'anatomie des insectes.
Il est le véritable fondateur de l'entomologie moderne, alors appelée « ***insectologie*** ».

dia5 mémoire

Son œuvre intitulée « ***Mémoires pour servir à l'histoire des insectes*** », fut publiée en six tomes de 1734 à 1742, mais, bien plus récemment, en 1928 et en 1955, furent encore publiés « ***Histoire des fourmis*** » et « ***Histoire des scarabées*** » à partir de manuscrits jusqu'alors inédits.

Dans l'étude de son « ***Cher petit peuple des abeilles*** », au tome 5, Réaumur s'intéresse aux « **gâteaux de cire** » et à la forme des cellules.

En déclarant : *dia 6 texte Réaumur*

« ***Comme la récolte et la préparation de la cire coûtent beaucoup aux abeilles, il leur importait extrêmement de la bien économiser*** »,

Il exprime ainsi l'intuition que les abeilles optimisent la construction de leurs cellules.

Il proposa ce problème au mathématicien allemand **Koenig** qui, utilisant les nouvelles méthodes du calcul différentiel, trouva une solution théorique correspondant, à deux minutes près, aux angles mesurés réellement sur chaque cellule par l'astronome **Maraldi**.
Ce minime écart était dû à l'imprécision des tables de l'époque.

Colin Mac Laurin a par ailleurs repris ces calculs et trouvé, en 1743, les valeurs exactes optimisant la cellule. *dia 7 Maclaurin*

Ma propre contribution a été de refaire tous ces calculs et de les poursuivre avec des techniques et des outils mathématiques des plus modernes pour encore mieux comprendre ce magnifique problème d'optimisation qui va nous mener au secret de la construction des gâteaux de cire par les abeilles.

En voici une présentation imagée et succincte, basée sur l'utilisation de la Géométrie, cet art dont Platon, en 387 avant JC, a fait placer au fronton de l'Académie d'Athènes cette devise :
« ***Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre*** » *dia8 Platon*

Alors que les abeilles ouvrières ne vivent qu'une quarantaine de jours, c'est pendant les quatre ans de sa vie que la reine des abeilles parcourt inlassablement le dédale obscur formé les gâteaux de cire composés de milliers de cellules dans lesquelles elle dépose ses œufs.
Chacune de ces cellules a la forme d'un prisme droit à base hexagonale dont le fond est formé de trois losanges : c'est un ***rhomboèdre***.

dia 9 rhombo Réaumur

Une présentation imagée de la cellule est de considérer un crayon en forme de prisme hexagonal que l'on taille en trois coups de canif !
Chaque coup de canif symbolise un plan déterminé par trois points : le premier point d'attaque sur une arête du prisme, les deux autres points étant de même niveau sur les arêtes voisines.
L'inclinaison du coup de canif modifie l'acuité de la pointe du crayon qui est alors formée de trois losanges.
Remarquons que si on taille avec un taille-crayon, la pointe est conique et les traces sur les faces sont des arcs d'hyperboles !

L'intuition de Réaumur était que les abeilles construisent les cellules dans un souci d'économie et que la forme du fond du rhomboèdre minimalise la quantité de cire nécessaire pour un volume donné.
C'est le problème d'optimisation que nous allons reprendre ici.

<u>Problème mathématique</u>

Avant d'aborder la construction spatiale d'une cellule d'abeille, il faut remarquer que mathématiquement on montre que le meilleur pavage du plan est réalisé par des hexagones réguliers identiques et jointifs. Cette forme hexagonale est bien adaptée à la forme quasi cylindrique des abeilles qui s'introduisent dans la cellule.

dia 10 pavage du plan

C'est le premier « secret » des abeilles.

Passons maintenant à l'espace : en utilisant la géométrie analytique de l'espace, nous allons établir la fonction qui exprime la quantité de cire nécessaire à la construction d'une cellule d'abeille en prenant pour variable l'angle de coupe du canif.
Ensuite, par calcul différentiel, on va rechercher la forme qui minimalise cette quantité de cire.
Comme le montre la diapositive, le point de départ est le choix judicieux d'un repère cartésien de l'espace.
Notre système de référence un trièdre trirectangle tel que : *dia 11 rhombo Arl axes*

Le plan **{** EMBED Equation.DSMT4 **}** est le plan de la base du prisme, l'origine O étant le centre de l'hexagone et deux sommets diamétralement opposés étant sur l'axe**{** EMBED Equation.DSMT4 **}**.
L'axe **{** EMBED Equation.DSMT4 **}** est l'axe de symétrie du prisme.

Données et choix des paramètres :
Le rayon de l'hexagone est noté R et la hauteur des trois sommets fixes est notée h.
Pour paramétrer l'inclinaison du plan de coupe, deux paramètres sont possibles : la longueur **{** EMBED Equation.DSMT4 **}** telle que le niveau du point d'attaque sera noté **{** EMBED Equation.3 **}** ou l'angle **{** EMBED Equation.3 **}** exprimant l'inclinaison du plan de coupe sur l'axe de symétrie du prisme, ces deux paramètres étant évidemment liés.

On note A, B, C les trois sommets fixes de niveau h et X, Y, Z, les trois sommets mobiles de niveau**{** EMBED Equation.3 **}**.

Dans le repère choisi, on détermine aisément les coordonnées des 12 sommets et en déduit, en prenant l'expression matricielle, l'équation du plan de coupe.

On constate alors que **le niveau du sommet S est symétrique du niveau du sommet X par rapport au plan ABC.**

On démontre alors que **la section plane AXBS** a la forme **d'un losange** dont une diagonale est fixe et l'autre mobile. *dia 12 losange Arl*

Pour étudier la quantité de cire nécessaire à l'élaboration d'une cellule, en la supposant partout de même épaisseur, il suffit de considérer qu'elle correspond à l'aire totale de la cellule.

Cette aire Q est la somme des aires des 6 trapèzes latéraux et des trois losanges formant le fond de la cellule. *dia 13 développ Arl*

On peut l'exprimer en fonction du paramètre **{** EMBED Equation.DSMT4 **}**
Aire totale de la cellule de rayon R, de grande arête h et de petite arête **{** EMBED Equation.3 **}**:

{ EMBED Equation.3 **}**

dia 14 vol enlev-ajout Alt

On montre que, par un phénomène de compensation entre une partie enlevée et une partie ajoutée, l**e volume de la cellule reste constant, quelle que soit la forme plus ou moins pointue de la pointe du rhomboèdre!** *dia 15 six rhombo Alt*

Plutôt que de faire l'analyse mathématique de l'optimisation de la fonction Q à partir du paramètre**{** EMBED Equation.3 **}**, on peut exprimer Q comme fonction de l'autre paramètre**{** EMBED Equation.DSMT4 **}**, lequel exprime l'inclinaison du canif par rapport à l'axe du crayon.

On obtient finalement*:* *dia 16 formule de Q*

{ EMBED Equation.DSMT4 **}{** EMBED Equation.3 **}**

Cette forme d'écriture, formée d'un terme constant et d'un terme variable est bien plus facile à étudier puisqu'il suffit d'optimiser la fonction trigonométrique :

{ EMBED Equation.3 **}** Dont la dérivée première est :**{** EMBED Equation.3 **}**
On en déduit que l'angle de coupe qui optimise l'aire de la cellule vaut :
{ EMBED Equation.3 **}** *dia 17 angle et courbe*

Le simple examen de la courbe de cette fonction montre bien ce phénomène de minimum

Etudions alors tout particulièrement cette cellule optimale.

Par trigonométrie, on calcule que l'angle obtus d'une face trapézoïdale et l'angle obtus du losange de toiture sont égaux au double de l'angle de coupe ! *dia 18 angle miel obtus*

{ EMBED Equation.3 **}**

C'est le deuxième « secret » des abeilles !

On retrouve ainsi la valeur mesurée approximativement par Maraldi à la demande de Réaumur, qui fut ensuite calculée par Koenig, grâce au calcul différentiel mais avec une imprécision due aux tables de l'époque, et enfin calculée exactement par Maclaurin en 1743.

Il est à remarquer que cet angle est aussi celui formé par les rayons liant l'atome de carbone aux atomes d'hydrogène dans la molécule de méthane CH_4 (feu follet, grisou)
Plus généralement, on a ainsi un tétrapode régulier dont les six plans formés par une paire de pieds partagent **l'espace en quatre parties égales.** *dia 19 tétrapode*

Passons alors à l'examen du « gâteau de cire » formé par ces cellules optimales.

dia 20 4 rhombo

Le plus simple pour s'imaginer la construction du gâteau de cire est de considérer trois cellules jointives latéralement et une quatrième orientée dans l'autre sens et dont le fond, placé en quinconce, s'emboîte parfaitement dans le creux formé par les fonds des trois autres.

Dans le gâteau de cire, les quatre arêtes partant du sommet d'une cellule d'abeille forment entre elles des angles égaux à { EMBED Equation.3 } = 109° 28' 16''.

Donc, **en tout sommet du fond d'une cellule du gâteau de cire, l'espace est divisé en quatre parties égales !**

En s'imbriquant dos à dos pour former le gâteau de cire, les cellules utilisent **parfaitement tout** l'**espace** et minimisent encore mieux la quantité de cire nécessaire aux abeilles pour construire tout un gâteau de cire !
Donc, l'optimisation d'une cellule entraîne l'optimisation de tout le gâteau de cire !

Par cette forme idéale, les rhombes des cellules s'emboîtent les uns dans l'intervalle des autres, offrant deux faces utiles aux gâteaux de cire.
En se référant aux formules utilisées en chimie organique, on comprend que les longues chaînes de tétrapodes créent, dans le plan médian des gâteaux de cire, une véritable **épine dorsale** dont la grande résistance permet de supporter le poids des récoltes entreposées dans les cellules.

C'est le troisième « secret » des abeilles !

Allons encore plus loin.

On calcule que**, les 9 faces, trapézoïdales ou en forme de losanges, d'une cellule rhomboédrique, forment toutes entre elles un angle de 120°!**

Conclusions :

dia 21 conclusions math

Pour optimiser la construction d'une cellule et du gâteau de cire :

a) le long de chaque arête, l'espace est divisé en trois parties égales

b) en chaque sommet du fond d'une cellule du gâteau de cire, à la rencontre de quatre arêtes, l'espace est divisé en quatre parties égales.

Il me reste à ajouter une « **Cuillère de miel sur le gâteau »** :

c) les trois diagonales issues du sommet commun aux trois losanges de toiture sont perpendiculaires entre elles et forment un trièdre trirectangle !

dia 22 conclusions géométriques

Ceci confirme le caractère parfait de la construction du gâteau de cire par les abeilles !

dia 23 Syracuse

Elles le pratiquent depuis tant de millénaires, puisqu'elles sont apparues sur Terre en même temps que les plantes à fleurs dont elles ont assuré la fécondation et la pérennité, modifiant ainsi, petit à petit, la composition de l'atmosphère terrestre jusqu'à nous la rendre respirable.

L'entomologiste **Huber** attribuait à la Providence l'habileté des abeilles et leur science d'architecte tandis que **Darwin** y voyait l'effet d'une sélection naturelle.

Oserions-nous, après la révélation de ces trois secrets, en conclure que les abeilles sont de parfaites mathématiciennes ?

Ajout symbolique

Après ces considérations historiques puis mathématiques, voici un petit ajout symbolique.
Nous sommes assez familiers avec le **nombre d'or** : { EMBED Equation.3 } = 1,618….

Il a été introduit en Grèce au 6^{e} siècle avant J-C par **Pythagore**, mais il est d'origine babylonienne. Son rôle dans la recherche du « « Beau » est particulièrement bien connu.

Dante en a donné la définition suivante :
« *La grande est à la petite ce que le tout est à la grande* », *dia 24 Dante*
qui, traduite en mathématique, en considérant le rectangle d'or, donne { EMBED Equation.3 }
Et mène au rapport entre la longueur et la largeur du rectangle d'or { EMBED Equation.3 }

On le retrouve dans la section dorée (divine proportion de **Luca Pacioli**), aussi bien que dans la suite de **Fibonacci,** dans les énigmes mathématiques de **Lewis Carroll,** délicieux auteur d' « Alice au pays des merveilles », dans la forme en spirale des ammonites et dans celle du gâteau des graines du tournesol. *dia 25 ammonite*

En hommage à la Nature et aux abeilles, je vous propose d'adopter un nouveau nombre que nous appellerons **le nombre de miel.**

Il exprimera toute l'harmonie des cellules que construisent les abeilles depuis des millénaires, en partageant l'espace en quatre parties égales :
{ EMBED Equation.3 } = 1,910
Exprimé en degrés d'arcs, ce nombre donne **l'angle de miel = 109° 28' 16''.**
C'est l'angle qui est au centre du tétrapode régulier, il optimise le fond des cellules d'abeilles et permet ainsi l'imbrication parfaite des cellules dos à dos pour former le gâteau de cire le plus économique et le plus robuste.

Dans le symbolisme, on trouve:

Le **triangle d'or :**
en forme de fronton isocèle d'angles 108°, 36° et 36° et dont les côtés sont dans le rapport du nombre d'or, ce triangle est un symbole de stabilité. *dia 26 tr d'or miel*

Le **rectangle d'or :**
carré long dont les côtés sont dans le rapport du nombre d'or.

Je vous propose d'adopter ensuite deux nouvelles formes géométriques, associées à ce nouveau nombre de miel :

Le **losange de miel**
qui a la forme de la toiture de la cellule d'abeille optimisant l'utilisation de l'espace.

Le **triangle de miel :**
moitié de ce losange, lui aussi en forme de fronton, comme le triangle d'or, mais exprimant encore plus la stabilité puisque son angle au sommet est 109° 28' 16''

Vu sous cet aspect symbolique, les abeilles pourraient être de parfaites mathématiciennes !

Mais, comme **Réaumur**, méfions-nous de tout anthropomorphisme.
En 1714, dans sa « Fable des abeilles », satire de la société de son époque, **Bernard Mandeville** écrit : *dia 27 Mandeville*

« Les abeilles ont été pour nous ce que sont les nuages, chacun y a vu ce qu'il a désiré d'y voir ».

Les curés des campagnes y ont vu un excellent modèle à proposer aux paysans : le labeur acharné et la soumission sont si profitables à l'église et aux puissants !

Tandis que les loges maçonniques plaçaient la ruche dans leurs symboles pour exalter le travail « par lequel on vient à bout de tout »

Chers amis, *dia 28 ab crétoise*

il y a peu de temps, j'ignorais pratiquement tout de l'apiculture et de son histoire même si l'entomologiste provençal **Fabre** et le poète **Maeterlinck** avaient enchanté ma jeunesse.

Depuis je me suis lancé dans la petite apiculture et j'ai parfait mes connaissances en suivant les cours de la Fédération Royale Provinciale Liégeoise d'Apiculture. Là aussi, j'ai compris qu'il y avait loin de la coupe aux lèvres, de la théorie à la pratique et, qu'avec les abeilles, la sanction pouvait être immédiate !

Les sociétés apicoles et tout particulièrement Apistoria permettent à des gens d'origines très diverses, mais unis par une passion commune, de se rassembler, d'échanger des idées ou même de partager un repas dans un climat amical et détendu, alors « qu'ils ne se seraient autrement jamais rencontrés »

Après ces quelques considérations historiques puis mathématiques, il m'a semblé symbolique de relier le nombre d'or au nombre de miel par l'évocation de l'abeille qui, butinant la fleur de tournesol, image du nombre d'or, bâtit son nid au nombre de miel.

René Marquet professeur de mathématique 2006

Comme l'abeille rapportant tout à l'intérêt de sa ruche, j'espère avoir pu, avec vous, rassembler ce qui était épars, en histoire, en apiculture, en mathématique et partager ainsi le miel de mes découvertes.

Bibliographie succincte

Réaumur, « Histoire des insectes, morceaux choisis »
Editions Jérôme Million, Grenoble, 2001
Gilles Bresson, « Réaumur, le savant qui osa croiser une poule avec un lapin »
Editions d'Orbestier, Le château d'Olonne, 2001
Pierre Déom, « La hulotte, 28-29 spécial mouches à miel »
Editions Passerage, Charleville-Mézières, 2003
Alain Satabin, « Pour la science, les formes de la vie », juillet 2004
Bruno Corbara, « La cité des abeilles », Découvertes Gallimard, 2002

Remerciements

L'excellente infographie est due au talent d'Arlette Lomry, professeur de dessin, Secrétaire de la Fédération Royale Provinciale Liégeoise d'Apiculture.

Coordonnées de l'auteur :

René Marquet
Professeur de mathématiques à l'Athénée Royal de Chênée

rue des ronces 7 à 4130 Tilff Belgique